3.5.22 Lineární nerovnice II

Předpoklady: 030522

Jak je to s problémem z minulé hodiny?
Získali jsme dvě řešení nerovnice $-x<3$:

Správné řešení.

$-x<3 \quad /+x$

$0<3+x \quad /-3$

$-3<x \qquad K=(-3;\infty)$

Test možné správnosti:
$x=1$: $-1<3$ (mělo vyjít a vyšlo)
$x=-4$: $-(-4)=4\not<3$ (nemělo vyjít a nevyšlo)

Nesprávné řešení

$-x<3 \quad /\cdot(-1)$

$x<-3 \qquad K=(-\infty;-3)$

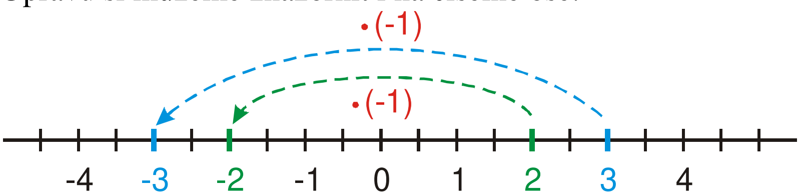
Test možné správnosti:
$x=-5$: $-(-5)=5\not<3$ (mělo vyjít a nevyšlo)
$x=4$: $-4<3$ (nemělo vyjít a vyšlo)

Kde se stala chyba? Dosud jsme využívali postupy z řešení rovnic a nic se nedělo. Je problém v násobení číslem (-1)? Vyzkoušíme si tuto úpravu na číslech.

$2<3 \quad /\cdot(-1)$

$-2\not<-3$

Úpravu si můžeme znázornit i na číselné ose:

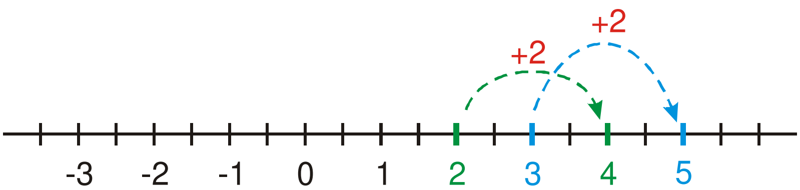


Vynásobení (-1) obrátilo postavení čísel na číselné ose (z většího čísla 3 udělalo menší číslo -3) $\Rightarrow$ tuto skutečnost musíme při řešení zohlednit a obrátit znaménko nerovnosti:

$2<3 \quad /\cdot(-1)$

$-2>-3$ (násobili jsme záporným číslem -1, které obrátilo situaci na ose, a proto obracíme i znaménko nerovnosti).

Při přičítání (i odečítání) reálných čísel se nic podobného neděje, proto znaménko nerovnosti neměníme.



$2<3 \quad /+2$

$4<5$

Která čísla budou při násobení převracet nerovnost stejně jako (-1)?
Všechna záporná čísla.

Bude převracení nastávat jenom při násobení?
Bude nastávat i při dělení (dělením kladného čísla záporným získáme záporné číslo).

$\Rightarrow$ Při násobení záporným číslem se změní znaménko obou čísel v nerovnosti a tím se změní i jejich nerovnost (z menšího se stane větší) $\Rightarrow$ pokud budeme násobit nerovnici záporným číslem, musíme nerovnost obrátit.

Při řešení nerovnic můžeme používat stejné úpravy jako při řešení rovnic (přičítání a odečítání reálných čísel, násobení a dělení kladnými reálnými čísly). Pokud nerovnici vynásobíme nebo vydělíme záporným číslem, musíme obrátit znaménko nerovnosti.

Př. 1: Vyřeš nerovnice.

a) $x-3\geq 5$ b) $5x\leq -2$ c) $3-4x>3$ d) $\frac{x}{4}-1<\frac{1}{3}$

a) $x-3\geq 5 \quad /+3$

$x\geq 8 \qquad K=\langle 8;\infty)$

b) $5x\leq -2 \quad /:5$

$x\leq -\frac{2}{5} \qquad K=\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right\rangle$

c) $3-4x>3 \quad /-3$

$-4x>0 \quad /:(-4)$

$x<0 \qquad K=(-\infty;0)$

d) $\frac{x}{4}-1<\frac{1}{3} \quad /+1$

$\frac{x}{4}<\frac{4}{3} \quad /\cdot 4$

$x<\frac{16}{3} \qquad K=\left(-\infty;\frac{16}{3}\right)$

Př. 2: Vyřeš nerovnice.

a) $2x-3\geq 3(x-1)-x$ b) $2(x-7)+3x\leq 4-5x$ c) $5-3x\leq x+4(1-x)-2$

a) $2x-3\geq 3(x-1)-x$

$2x-3\geq 3x-3-x$

$2x-3\geq 2x-3 \quad /+3$

$2x\geq 2x \quad /-2x$

$0x\geq 0$ - můžeme za x dosadit libovolné číslo a nerovnice vyjde (vyhovuje i situace, kdy se obě strany rovnají) $\Rightarrow$ $K=R$.

b) $2(x-7)+3x\leq 4-5x$

$2x-14+3x\leq 4-5x$

$5x-14 \le 4-5x \qquad / +14$

$5x \le 18-5x \qquad / +5x$

$10x \le 18 \qquad / :10$

$x \le 1,8 \qquad\qquad K = \left(-\infty; 1,8\right\rangle$

c) $5-3x \le x+4(1-x)-2$

$5-3x \le x+4-4x-2$

$5-3x \le 2-3x \qquad / -2$

$3-3x \le -3x \qquad / +3x$

$3 \le 0x$ - ať dosadíme x cokoliv, rovnice nikdy nevyjde $\Rightarrow$ $K = \emptyset$

Pedagogická poznámka: U bodů a) a c) je třeba se nesnažit o nějaká pravidla typu: "Když je vlevo i vpravo nula, tak je řešením R", ale trvat na tom, že žáci musí sami poznat (například dosazováním), zda nerovnice vyjde vždy nebo nikdy (pro mnoho z nich je daleko přirozenější tuto skutečnost objevit na řádcích před poslední úpravou, kde se ještě vyskytuje neznámá a kam si mohou zkusmo dosazovat).
Při kontrole si na tabuli píšeme různé "konečné stavy" těchto nerovnic a ukazujeme si, že všechny (pokud jsou správné) znamenají to samé.

Př. 3: Vyřeš nerovnice.

a) $\frac{3-2x}{5} \ge \frac{1}{2}$ b) $(x-3)(x+2) > (x-1)^2$ c) $2(x-1)+x > 3(x-2)+1$

a) $\frac{3-2x}{5} \ge \frac{1}{2} \qquad / \cdot 10$

$2(3-2x) \ge 5$

$6-4x \ge 5 \qquad / -6$

$-4x \ge -1 \qquad / :(-4)$

$x \le \frac{1}{4} \qquad\qquad K = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right\rangle$

b) $(x-3)(x+2) > (x-1)^2$

$x^2+2x-3x-6 > x^2-2x+1 \qquad / -x^2$

$-x-6 > -2x+1 \qquad / +2x$

$x-6 > 1 \qquad / +6$

$x > 7 \qquad\qquad K = (7; \infty)$

c) $2(x-1)+x > 3(x-2)+1$

$2x-2+x > 3x-6+1$

$3x-2 > 3x-5 \qquad / -3x$

$-2 > -5 \qquad\qquad K = R$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je zaměstnání pro rychlejší žáky.

Př. 4: Najdi všechna čísla, která můžeme dosadit místo písmenka *p*, aby řešením nerovnice byla všechna reálná čísla.

a) $2x+p\geq 3(x-1)-x$ b) $x+p+4<1-2(x-p)$ c) $p(x-2)\geq 2x+3-p$

Upravíme si nerovnici do stavu, ze kterého je více vidět.

a) $2x+p\geq 3x-3-x$

$2x+p\geq 2x-3 \quad /-2x$

$p\geq -3$ Z nerovnice zmizela neznámá (v předchozím kroku byl na obou stranách výraz $2x$, který se odečetl $\Rightarrow$ na hodnotě *x* nezáleží) $\Rightarrow$ pokud bude nerovnost platná, řešením nerovnice budou všechna reálná čísla $\Rightarrow$ musí platit $p\geq -3 \Rightarrow p\in\langle -3;\infty)$.

b) $x+p+4<1-2(x-p)$

$x+p+4<1-2x+2p$

$x+p+4<1-2x+2p \quad /+2x$

$3x+p+4<1+2p \quad /-p$

$3x+4<1+p \quad /-4$

$3x<p-3 \quad /:3$

$x<\frac{p-3}{3}$ $\Rightarrow$ řešením nerovnice nikdy nebudou všechna reálná čísla. Ať zvolíme za *p* jakékoliv číslo, vždy bude pravá strana rovna nějakému číslu a za *x* budeme moci dosazovat pouze čísla menší.

c) $p(x-2)\geq 2x+3-p$

$px-2p\geq 2x+3-p \quad /-2x$

$px-2x-2p\geq 3-p \quad /+2p$

$px-2x\geq 3+p$

$x(p-2)\geq 3+p$

Pokud mají být řešením nerovnice všechna reálná čísla, musí zmizet proměnná *x* $\Rightarrow$ závorka $(p-2)$ se musí rovnat nule $\Rightarrow$ $p=2$. Zkusíme tuto hodnotu za *p* dosadit:

$x(2-2)\geq 3+2$

$x\cdot 0\geq 5$ tato nerovnost neplatí $\Rightarrow$ není možné najít takovou hodnotu za číslo *p*, aby řešením nerovnice byla všechna reálná čísla.

Pedagogická poznámka: Poslední příklad je domácí procvičování pro žáky, kteří měli problémy s body a) a c) v příkladu 2.

Př. 5: Vyřeš nerovnice.

a) $x-3\geq x+1$ b) $0\cdot x\leq 5$ c) $3-3x>3-3x$ d) $4-2x\leq 3-2x$

a) $x-3\geq x+1 \quad /-x$

$-3\geq 1$ Neplatná nerovnost, už ze zadání je jasné, že hodnota levé strany bude menší než hodnota pravé (vlevo od *x* odečítáme, vpravo k němu přičítáme) $\Rightarrow$ $K=\emptyset$.

b) $0\cdot x\leq 5$

Nerovnost platí pro všechna reálná čísla (na levé straně bude po vynásobení vždy nula) $\Rightarrow$ $K = R$.

c) $3-3x > 3-3x \quad / +3x$

$3 > 3 \quad / -3$

$0 > 0$ Neplatná nerovnost, už od zadání je zřejmé, že na obou stranách vyjde stejná hodnota, což nevyhovuje zadání (levá strana má být větší) $\Rightarrow$ $K = \emptyset$.

d) $4-2x \leq 3-2x \quad / +2x$

$4 \leq 3$ Neplatná nerovnost, už ze zadání je jasné, že hodnota levé strany bude větší než hodnota pravé (vlevo odečítáme stejné číslo $2x$ od většího čísla než na pravé) $\Rightarrow$ $K = \emptyset$.

Shrnutí: Pokud nerovnici vynásobíme nebo vydělíme záporným číslem, musíme obrátit znaménko nerovnosti.